Μάθημα 14ο 13/05/2020

Κεφ 4ο « Αναλυτικές Συναρτήσεις »

- Όταν λέει ολόμορφες συναρτήσεις + Riemann θα έχω στο νου μου τις Εξισώσεις Cauchy Riemann

- Όταν λέει συναρτήσεις που μπορούν να γραφούν μέσω δυναμοσειρών + Weierstrass θα έχω στο νου μου τις αναλυτικές συναρτήσεις.

- Είδαμε • τον ορισμό της ολόμορφης (δηλαδή μιγαδικά διαφορίσιμης σε ένα ανοικτό σύνολο). συνάρτησης ως

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}, \forall z \text{ στο ανοικτό σύνολο,}$$

- Και την ισοδυναμία με τη διαφορισιμότητα του αντίστοιχου διανυσματικού πεδίου στο $\mathbb{R}^2$ με

$$D\binom{u}{v}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}(x_0,y_0)$$

όπου $\boxed{u_x = v_y}$ και $\boxed{v_x = -u_y}$

$$\underbrace{\hphantom{u_x = v_y \quad \text{και} \quad v_x = -u_y}}$$

Εξισώσεις Cauchy-Riemann

Θα δούμε ότι η $f: D \to \mathbb{C}$, <u>$D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό</u>

f ολόμορφη $\Leftrightarrow$ f αναλυτική

$\Leftrightarrow$ η f αναπτύσσεται γύρω από κάθε $z_0 \in D$ σε δυναμοσειρά (σειρά Taylor), δηλ. $\forall z_0 \in D$ $\exists r > 0$ $\exists c_n(z_0) \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{c_n(z_0)}_{= \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}} (z - z_0)^n \quad , \forall z \in D(0, r)$$

<u>Ορισμός</u>

① Έστω μία ακολουθία $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. Η ακολουθία $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ των μερικών αθροισμάτων:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k \quad , n \in \mathbb{N}$$

ονομάζεται σειρά και συμβολίζεται με:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Και αν η $(S_n) \subset \mathbb{C}$ συγκλίνει, τότε και το όρι[ο] της συμβολίζεται με:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n \to \infty} S_n$$

② Λέμε ότι η (S_n) συγκλίνει απόλυτα αν:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$$

Σχόλιο: Αν ξέρουμε τις σειρές στο $\mathbb{R}$ και τη συμπεριφορά τους, το ίδιο θα ισχύει και για τις σειρές στο $\mathbb{C}$.

Σχόλιο: Οι αποδείξεις στηρίζονται σε απειροστικό λογισμό Ι δεν θα τις ζητήσει, ζητάει μόνο αποδείξεις που αφορούν μιγαδικούς αριθμούς

Πρόταση 4.1.1:

α) $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει $\Rightarrow$ $z_n \to 0$

β) Αν οι $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ συγκλίνουν, τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda z_n + \mu w_n)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

και για τα όριά τους ισχύει:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda z_n + \mu w_n) = \lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} z_n + \mu \cdot \sum_{n=1}^{\infty} w_n$$

γ) Αν σε αλγεβρική μορφή $z_n = x_n + i y_n$, $n \in \mathbb{N}$

τότε: $$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \cdot \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

δ) Αν μια σειρά συγκλίνει απόλυτα, τότε συγκλίνει

Απόδειξη: Να την διαβάσουμε εμείς.

Παράδειγμα 9.1.1

Η γεωμετρική σειρά συγκλίνει για $|z|<1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad z \in D(0,1).$$

Απόδειξη

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \ \forall z \in D(0,1)$$

(αφού $z^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ για $z \in D(0,1)$

$$\Leftrightarrow \underbrace{|z|^n \to 0 \text{ για } z \in D(0,1)}_{\text{γνωστό από ΑΛΙ}} \ ).$$

Άρα: $$\sum_{k=0}^{\infty} |z|^k = \frac{1}{1-|z|} \quad \forall z \in D(0,1)$$

αφού $z \in D(0,1) \Leftrightarrow |z| \in [0,1) \subset D(0,1)$

Πρόταση 4.1.2

(α) Κριτήριο Σύγκρισης

- $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n| < +\infty$ και $|z_n| \leq |w_n|$

τότε $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{|z_n|}{|w_n|} \in (0, +\infty)$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} |w_n| < +\infty$$

(β) Κριτήριο Λόγου

- $\lim_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ αποκλίνει

(γ) Κριτήριο Ρίζας

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n$: αποκλίνει

Π.χ. 4.1.2

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{a} |z|^{n} < +\infty , \quad a>0 , \quad |z|<1$$

(β) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p}} < +\infty \quad \text{και} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{p}} < +\infty , \quad p>1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p}} = +\infty \quad \text{και} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{p}} = +\infty , \quad p<1$$

ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

Ορισμός

Μια σειρά της μορφής:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

ονομάζεται δυναμοσειρά με κέντρο $a \in \mathbb{C}$ και συντελεστές $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Η σειρά των συναρτήσεων για τις συναρτήσεις $f_n(z) = c_n (z-a)^n$, ορίζει στο πεδίο σύγκλισης της $D = \{ z \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$: συγκλίνει $\}$

μία συνάρτηση $f : D \to \mathbb{C}$, το κατά σημείο όριο της:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n , \quad z \in D$$

Π.χ. 4.2.1 :

a) Η μητέρα των Δυναμοσειρών: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

Η δυναμοσειρά έχει κέντρο $a=0$ και $c_n=1$
και πεδίο σύγκλισης $D=D(0,1)$.

β) Από Κριτήριο Σύγκρισης, κάθε φραγμένη ακολουθία συντελεστών $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$:

$$\eta \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ :συγκλίνει απόλυτα}, \forall z\in D(0,1)$$

<u>Ορισμός</u> (Ομοιόμορφη Σύγκλιση)

1) Η ακολουθία των συναρτήσεων $f_n(z)=c_n(z-a)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f: D\to\mathbb{C}$ αν

$$\|f_n-f\| \longrightarrow 0$$

ή

$$|f_n(z)-f(z)| \longrightarrow 0 .$$

2) Η σειρά των συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$:συγκλίνει ομοιόμορφα στην f, αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

<u>Θεώρημα 4.2.1.</u>

(1) Αν η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα τότε συγκλίνει και κατά σημείο δηλαδή $f_n(z)\to f(z)$.

(2) <u>Κριτήριο Cauchy</u>: Η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα αν και μόνο αν είναι ακολουθία

Cauchy, δηλαδή:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n,m\in\mathbb{N},\ m,n\geq n_0\ \ \|f_n-f_m\|<\varepsilon.$$

(3) <u>Κριτήριο Weierstrass</u>

$$\|f_n\|\leq M_n,\ n\in\mathbb{N},\ \sum_{n=1}^{\infty}M_n<+\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}f_n$$

<u>συγκλίνει</u>
<u>ομοιόμορφα.</u>

(4) Αν οι f_n είναι συνεχείς συναρτήσεις και $f_n\to f$ τότε η f είναι συνεχής.

<u>Απόδειξη</u>: εκτός ύλης

<u>Συμπέρασμα του Λήμματος 4.2.1.</u>

$$\lim_{z\to a}\lim_{n\to\infty}f_n(z)=\lim_{n\to\infty}\lim_{z\to a}f_n(z).$$

Παράδειγμα ομοιόμορφης/μη ομοιόμορφης σύγκλισης:

Έστω $f_n(z)=z^n$, $\forall z\in\mathbb{C}$, $\forall n\in\mathbb{N}_0=\{0\}\cup\mathbb{N}$

$\Rightarrow \forall z\in D(0,1):\ f_n(z)\to 0=:f(z)$.

[$\forall z\in\mathbb{C}$ με $|z|>1$ η $f_n(z)$ δεν συγκλίνει σε όριο $\in\mathbb{C}$
για $|z|=1$ εξαρτάται π.χ. $f_n(1)=1\to 1$]

Άρα στο $D(0,1)$ η f_n συγκλίνει κατά σημείο στο 0 ομοιόμορφα???

Έχουμε λοιπόν:

$f_n(z) = z^n \to 0$ κ.σ. στο $D(0,1)$ ομοιόμορφα ???

$$\|f_n - f\|_{D(0,1)} = \|f_n\|_{D(0,1)} = \sup_{z\in D(0,1)} \underbrace{|f_n(z)|}_{=|z|^n} = 1 \not\to 0$$

Άρα $f_n \to 0$ κατά σημείο στο $D(0,1)$

αλλά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

Όμως $z \in \overline{D}(0,1-\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0,1)$ έχουμε

$f_n(z) \to 0$ κ.σ. στο $\overline{D}(0,1-\varepsilon)$

και

$$\|f_n - f\|_{\overline{D}(0,1)} = \|f_n\|_{\overline{D}(0,1-\varepsilon)} = \sup_{z\in\overline{D}(0,1-\varepsilon)} |f_n(z)|$$

$$= \sup_{|z|\le 1-\varepsilon} |z|^n = \underbrace{(1-\varepsilon)}_{\in(0,1)}{}^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Άρα και $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $\overline{D}(0,1-\varepsilon)$

<u>Πρόταση 4.2.1.</u> (SOS - super-sos! για να καταλάβουμε τα επόμενα)

Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_0-a)^n$ συγκλίνει σε κάποιο $z_0 \in \mathbb{C}$, με $z_0 \neq a$ <u>τότε</u>:

(α) η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα, δηλαδή

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||(z_0-a)|^n < \infty \quad \forall z \in D(a, |z_0-a|)$$

ή για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z-a| < |z_0-a|$

(β) συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε $K \subset D(a, |z_0-a|)$ όπου K: συμπαγές.

(γ) <u>Ειδικότερα</u>: η $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\bar{D}(a, |z_0-a|-\varepsilon)$, $\forall \varepsilon \in (0, |z_0-a|)$

<u>Λήμμα 4.2.2</u>

K: συμπαγές $\subset D(a,r) \iff$

$\iff \exists \varepsilon \in (0,r) : K \subset \bar{D}(a, r-\varepsilon)$

Πρόταση 4.2.2: SOS

Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ με

κέντρο $a \in \mathbb{C}$ και συντελεστές $c_n \in \mathbb{C}$

Τότε το $R = \sup\{r \geq 0 : (|c_n| r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ φραγμένη}\}$

είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

(α) Αν $R \in (0, +\infty)$: η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα για $z \in D(a, R)$

(β) Αν $R = 0$: η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο για $z = a$ με όριο $c_0 \in \mathbb{C}$.

(γ) Αν $R = +\infty$: η δυναμοσειρά συγκλίνει σε όλο το $\mathbb{C}$.

Πρόταση 4.2.3 :

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ τότε $R = \lim_{n \to \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \in [0, +\infty]$

Πρόταση 4.2.4

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ τότε $R = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$

Θεώρημα 4.2.2 SOS - DUPER - SOS

Κάθε δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ που συγκλίνει στο $D(a,R)$, $R>0$ [ακόμα και $R=+\infty$], ορίζω την $f: D(a,R) \to \mathbb{C}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$, η οποία f

είναι ολόμορφη στο $D(a,R)$ και μάλιστα άπειρες φορές μιγαδικά διαφορίσιμη στο $D(a,R)$.

και $$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n ((z-a)^n)' =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}, \quad \forall z \in D(a,R)$$

και $$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$ με:

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(n)} = (f^{(n-1)})', \quad n \in \mathbb{N}$$

SUPER - DUPER - SOS: Πρόταση 4.2.1
+
Θεώρημα 4.2.2